Lógica e Teoria dos Conjuntos

Introdução à Lógica Bivalente

Exercícios do Caderno de Apoio

Os exercícios que se seguem são propostas dos autores do programa de Matemática A que constam no Caderno de Apoio ao 10.º Ano.

Os exercícios que se encontram assinalados com um (*) ou dois (**) asteriscos correspondem a desempenhos progressivamente mais avançados (de carácter opcional).

Questão 1

Considere as proposições p e q tais que p é falsa e $p \vee q$ é verdadeira.

Indique o valor lógico de cada uma das proposições abaixo.

1.1 q. Ver resposta.

1.2 $p \wedge q$. Ver resposta.

1.3 $\sim p \vee q$. Ver resposta.

1.4 $\sim(p \vee q)$. Ver resposta.

1.5 $\sim(\sim p \wedge q)$. Ver resposta.

1.6 $p \Rightarrow \sim q$. Ver resposta.

1.7 $\sim p \Leftrightarrow q$. Ver resposta.

1.1 q.

Resolução

Comecemos por recordar que a proposição $p \vee q$ é verdadeira se, e somente se, pelo menos uma das proposições, p ou q, for verdadeira.

Como $p \vee q$ é verdadeira e p é falsa, conclui-se que q tem de ser verdadeira ($F \vee V \Leftrightarrow V$).

1.2 $p \wedge q$.

Resolução

Comecemos por recordar que a proposição $p \wedge q$ é verdadeira se, e somente se, as proposições p e q forem ambas verdadeiras.

Como p é falsa, conclui-se que $p \wedge q$ é falsa.

1.3 $\sim p \vee q$.

Resolução

Como a proposição p é falsa, a proposição $\sim p$ é verdadeira.

Como a proposição $\sim p \vee q$ é verdadeira se, e somente se, pelo menos uma das proposições, $\sim p$ ou q, for verdadeira, conclui-se que $\sim p \vee q$ é verdadeira.

1.4 $\sim(p \vee q)$.

Resolução

A proposição $(p \vee q)$ é verdadeira. Logo, $\sim(p \vee q)$ é falsa.

1.5 $\sim(\sim p \wedge q)$.

Resolução

Como a proposição p é falsa, sabe-se que a proposição $\sim p$ é verdadeira.

A proposição $\sim p \wedge q$ é verdadeira porque as duas proposições $\sim p$ e q são verdadeiras.

Portanto, $\sim(\sim p \wedge q)$ é uma proposição falsa.

1.6 $p \Rightarrow \sim q$.

Resolução

A proposição implicação entre p e q é falsa se, e somente se, o antecedente (p) for verdadeiro e o consequente (q) for falso.

Como a proposição p é falsa, conclui-se, então, que a proposição $p \Rightarrow \sim q$ é verdadeira.

1.7 $\sim p \Leftrightarrow q$.

Resolução

Duas proposições são equivalentes se tiverem o mesmo valor lógico.

Como a proposição p é falsa, a proposição $\sim p$ é verdadeira.

A proposição q é verdadeira (como se viu em 1.1)

Portanto, $\sim p \Leftrightarrow q$ é uma proposição verdadeira.

Questão 2

Considere proposições p e q. Simplifique as expressões que definem proposições e indique, sempre que possível, o respetivo valor lógico.

2.1 $\sim p \wedge (p \wedge q)$. Ver resposta.

2.2 $\sim p \vee (p \vee q)$. Ver resposta.

2.3 $\sim p \wedge (p \vee q)$. Ver resposta.

2.4* $[\sim p \wedge (p \vee q)] \wedge \sim q$. Ver resposta.

2.5*$[p \vee (\sim p \wedge q)] \vee \sim q$. Ver resposta.

2.1 $\sim p \wedge (p \wedge q)$

Resolução

Utilizando a propriedade associativa da conjunção, $\sim p \wedge (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge p) \wedge q$.

Pelo princípio da não contradição, $\sim p \wedge p$ é uma proposição falsa.

Então, porque *F* é o elemento absorvente da conjunção e a conjunção de duas proposições é verdadeira se, e somente se, ambas forem verdadeiras, tem-se que $\sim p \wedge (p \wedge q) \Leftrightarrow F \wedge q \Leftrightarrow F$.

Portanto, o valor lógico de $\sim p \wedge (p \wedge q)$ é falsidade.

2.2 $\sim p \vee (p \vee q)$.

Resolução

Utilizando a propriedade associativa da disjunção, $\sim p \vee (p \vee q) \Leftrightarrow \sim (p \vee p) \vee q$.

Pelo princípio do terceiro excluído, $\sim p \vee p$ é uma proposição verdadeira.

Então, porque V é o elemento absorvente da disjunção e a disjunção de duas proposições é verdadeira se, e somente se, pelo menos uma das proposições for verdadeira, tem-se que $\sim p \vee (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee q \Leftrightarrow V \vee q \Leftrightarrow V$.

Portanto, o valor lógico de $\sim p \vee (p \vee q)$ é verdade.

2.3 $\sim p \wedge (p \vee q)$.

Resolução

Utilizando a propriedade distributiva da conjunção relativamente à disjunção, tem-se $\sim p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge p)$.

Pelo princípio da não contradição, $\sim p \wedge p$ é uma proposição falsa.

Então, como F é o elemento neutro da disjunção, tem-se que

$\sim p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge p) \Leftrightarrow F \vee (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \wedge q$.

Logo, não é possível determinar o valor lógico da proposição $\sim p \wedge (p \vee q)$.

2.4* $[\sim p \wedge (p \vee q)] \wedge \sim q$.

Resolução

Já se concluiu, na alínea anterior, que $\sim p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge p$.

Portanto, $[\sim p \wedge (p \vee q)] \wedge \sim q \Leftrightarrow \sim p \wedge (q \wedge \sim q)$ e, usando a propriedade associativa da conjunção, $[\sim p \wedge (p \vee q)] \wedge \sim q \Leftrightarrow (\sim p \wedge q) \wedge \sim q$.

Pelo princípio da não contradição, $q \wedge \sim q$ é uma proposição falsa.

Então, porque F é o elemento absorvente da conjunção e a conjunção de duas proposições é verdadeira se, e somente se, ambas forem verdadeiras, tem-se que $[\sim p \wedge (p \vee q)] \wedge \sim q \Leftrightarrow \sim p \wedge (q \wedge \sim q \Leftrightarrow \sim p \wedge F \Leftrightarrow F$.

Portanto, o valor lógico de $[\sim p \wedge (p \vee q)] \wedge \sim q$ é falsidade.

2.5* $[p \vee (\sim p \wedge q)] \vee \sim q$.

Resolução

Utilizando a propriedade distributiva da disjunção relativamente à conjunção,

$p \vee (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee \sim p) \wedge (p \vee p)$.

Pelo princípio do terceiro excluído, $p \vee \sim p$ é uma proposição verdadeira. Então,

tem-se que $p \vee (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow V \wedge (p \vee p)$.

Como V é o elemento neutro da conjunção, tem-se que

$[p \vee (\sim p \wedge q)] \vee \sim q \Leftrightarrow [V \wedge (p \vee q)] \vee \sim q \Leftrightarrow (p \vee q) \vee \sim q$.

Logo, utilizando, sucessivamente, a propriedade associativa da disjunção, o princípio do terceiro excluído e o facto de V ser o elemento absorvente da disjunção, tem-se que $[p \vee (\sim p \wedge q)] \vee \sim q \Leftrightarrow (p \vee q) \vee \sim q \Leftrightarrow p \vee (q \vee \sim q) \Leftrightarrow p \vee V \Leftrightarrow V$.

Portanto, o valor lógico de $[p \vee (\sim p \wedge q)]$□□$q$ é verdade.

Questão 3

*Determine o valor lógico das proposições *p*, *q* e *r* sabendo que a proposição:

3.1 $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ é falsa. Ver resposta.

3.2 $\sim(p \Rightarrow q) \wedge r$ é verdadeira. Ver resposta.

3.1 $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ é falsa.

Resolução

Recordemos que a proposição implicação entre *p* e *q* é falsa se, e somente se, o antecedente (*p*) for verdadeiro e o consequente (*q*) for falso. Logo, se $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ é falsa, conclui-se que a proposição *p* é verdadeira e a proposição $q \Rightarrow r$ é falsa. Analogamente, se *qr* é falsa, conclui-se que a proposição *q* é verdadeira e a proposição *r* é falsa.

Portanto, a proposição *p* é verdadeira, a proposição *q* é verdadeira e a proposição *r* é falsa.

3.2 $\sim(p \Rightarrow q) \wedge r$ é verdadeira.

Resolução

Recordemos que a conjunção de duas proposições é verdadeira se, e somente se, ambas foram verdadeiras.

Logo, as proposições $\sim(p \Rightarrow q)$ e r são ambas verdadeiras.

Se $\sim(p \Rightarrow q)$ é verdadeira, então $p \Rightarrow q$ é falsa. A proposição implicação entre p e q é falsa se, e somente se, o antecedente (p) for verdadeiro e o consequente (q) for falso. Logo, a proposição p é falsa e a proposição q é verdadeira.

Portanto, a proposição p é falsa, a proposição q é verdadeira e a proposição r é verdadeira.

Questão 4

*Sabe-se que $(p \Rightarrow \sim q) \wedge (q \Rightarrow \sim r) \square p$ é uma proposição verdadeira.

Qual é o valor lógico de p, de q e de r?

Ver resposta.

Resolução

Se p fosse uma proposição falsa, como F é o elemento absorvente da conjunção, a proposição $(p \Rightarrow \sim q) \wedge (q \Rightarrow \sim r)$⍰$p$ seria falsa, contrariando o enunciado. Assim, p é uma proposição verdadeira.

Analogamente se conclui que as proposições $p \Rightarrow \sim q$ e $q \Rightarrow \sim r$ são ambas verdadeiras.

Se p e $p \Rightarrow \sim q$ são proposições verdadeiras, conclui-se que $\sim q$ é verdadeira, uma vez que a proposição implicação é falsa se, e somente se, o antecedente for verdadeiro e o consequente falso. Logo, a proposição q é falsa.

Se q é falsa, então $q \Rightarrow \sim r$ é verdadeira independentemente do valor lógico de $\sim r$, ou seja, independentemente do valor lógico de r.

Portanto, a proposição p é verdadeira, a proposição q é falsa e a proposição r pode ser verdadeira ou falsa.

Sugestão: Construa uma tabela de verdade para confirmar os resultados obtidos ou visite http://www.wolframalpha.com/.

p	q	r	$\sim q$	$\sim r$	$p \Rightarrow \sim q$	$q \Rightarrow \sim r$	$(p \Rightarrow \sim q) \wedge (q \Rightarrow \sim r) \wedge p$
V	V	V	F	F	F	F	F
V	V	F	F	V	F	V	F
$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{V}$	V	F	V	V	$\boldsymbol{V}$
$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	V	V	V	V	$\boldsymbol{V}$
F	V	V	F	F	V	F	F
F	V	F	F	V	V	V	F
F	F	V	V	F	V	V	F
F	F	F	V	V	V	V	F

Questão 5

Indique o valor lógico das seguintes proposições:

5.1 «7 é um número primo e 2 não é um número primo.» Ver resposta.

5.2 «Tanto $\sqrt{49}$ como □ são números irracionais.» Ver resposta.

5.3 «70 é múltiplo de 7 e de 5.» Ver resposta.

5.4 «28 é múltiplo de 7 ou de 8.» Ver resposta.

5.5 «111 é um número primo ou 19 é múltiplo de 9.» Ver resposta.

5.1 «7 é um número primo e 2 não é um número primo.»

Resolução

A proposição «7 é um número primo» é verdadeira.

A proposição «2 não é um número primo» é falsa.

Como a conjunção de proposições é verdadeira se, e somente se, ambas forem verdadeiras, conclui-se que a proposição dada tem valor lógico falso.

5.2 «Tanto $\sqrt{49}$ como π são números irracionais.»

Resolução

A proposição « $\sqrt{49}$ é um número irracional» é falsa, uma vez que $\sqrt{49}=7$ é um número natural.

A proposição «π é um número irracional» é verdadeira.

Como a conjunção de proposições é verdadeira se, e somente se, ambas forem verdadeiras, conclui-se que a proposição dada tem valor lógico falso.

5.3 «70 é múltiplo de 7 e de 5.»

Resolução

A proposição «70 é múltiplo de 7» é verdadeira.

A proposição «70 é múltiplo de 5» é verdadeira.

Como a conjunção de proposições é verdadeira se, e somente se, ambas forem verdadeiras, conclui-se que a proposição dada tem valor lógico verdadeiro.

5.4 «28 é múltiplo de 7 ou de 8.»

Resolução

A proposição «28 é múltiplo de 7» é verdadeira.

A proposição «28 é múltiplo de 8» é falsa.

Como a disjunção de proposições é falsa se, e somente se, ambas forem falsas, conclui-se que a proposição dada tem valor lógico verdadeiro.

5.5 «111 é um número primo ou 19 é múltiplo de 9.»

Resolução

A proposição «111 é um número primo» é falsa.

A proposição «19 é múltiplo de 9» é falsa.

Como a disjunção de proposições é falsa se, e somente se, ambas forem falsas, conclui-se que a proposição dada tem valor lógico falso.

Questão 6

Indique o valor lógico das proposições abaixo.

6.1 «π é igual a 3,14 ou a 3,1416.» Ver resposta.

6.2 «12 é um número múltiplo de 4 ou de 7.» Ver resposta.

6.3 $\frac{\pi}{4} < \frac{2}{3} \vee \frac{\pi}{4} < \frac{4}{5}$. Ver resposta.

6.4 «$\sqrt{\frac{9}{4}}$ é um número irracional maior do que 1.» Ver resposta.

6.5 $\sqrt{5} < \sqrt{2} + \sqrt{3} \wedge \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{\pi}$. Ver resposta.

6.1 «π é igual a 3,14 ou a 3,1416.»

Resolução

A proposição «π é igual a 3,14» é falsa.

A proposição «π é igual a 3,1416» é falsa.

Como a disjunção de proposições é falsa se, e somente se, ambas forem falsas, conclui-se que a proposição dada tem valor lógico falso.

6.2 «12 é um número múltiplo de 4 ou de 7.»

Resolução

A proposição «12 é múltiplo de 4» é verdadeira.

A proposição «12 é múltiplo de 7» é falsa.

Como a disjunção de proposições é falsa se, e somente se, ambas forem falsas, conclui-se que a proposição dada tem valor lógico verdadeiro.

6.3 $\frac{\pi}{4} < \frac{2}{3} \vee \frac{\pi}{4} < \frac{4}{5}$

Resolução

A proposição $\frac{\pi}{4} < \frac{2}{3}$ é falsa.

A proposição $\frac{\pi}{4} < \frac{4}{5}$ é verdadeira.

Como a disjunção de proposições é falsa se, e somente se, ambas forem falsas, conclui-se que a proposição dada tem valor lógico verdadeiro.

6.4 «$\sqrt{\frac{9}{4}}$ é um número irracional maior do que 1.»

Resolução

Observe-se que $\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$. A proposição «$\sqrt{\frac{9}{4}}$ é um número irracional» é falsa. A proposição «$\sqrt{\frac{9}{4}}$ é um número maior do que 1» é verdadeira.

Como a conjunção de proposições é verdadeira se, e somente se, ambas forem verdadeiras, conclui-se que a proposição dada tem valor lógico falso.

6.5 $\sqrt{5} < \sqrt{2} + \sqrt{3} \wedge \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{\pi}$

Resolução

A proposição «$\sqrt{5} < \sqrt{2} + \sqrt{3}$» é verdadeira.

A proposição «$\sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{\pi}$» é verdadeira.

Como a conjunção de proposições é verdadeira se, e somente se, ambas forem verdadeiras, conclui-se que a proposição dada tem valor lógico verdadeiro.

Questão 7

Considere as proposições:

a: $\sqrt{7}$ é um número irracional;

b: $\sqrt{7} > 3$;

c: $1 - \sqrt{7} < -2$.

7.1 Indique o valor lógico das proposições a, b e c. Ver resposta.

7.2 Traduza em linguagem corrente, sem utilizar a palavra «não», as proposições abaixo e indique o respetivo valor lógico.

7.2.1 $a \wedge \sim b$. Ver resposta.

7.2.2 $\sim a \vee b$. Ver resposta.

7.2.3 $\sim b \Rightarrow \sim c$. Ver resposta.

7.1 Indique o valor lógico das proposições a, b e c.

Resolução

A proposição *a* é verdadeira e as proposições *b* e *c* são falsas.

7.2.1 $a \wedge \sim b$.

Resolução

$a \wedge \sim b$ traduz-se em linguagem corrente por: « $\sqrt{7}$ é um número irracional inferior ou igual a 3.»

Como as proposições a e $\sim b$ são ambas verdadeiras, $a \wedge \sim b$ é uma proposição verdadeira.

7.2.2 $\sim a \vee b$.

Resolução

$\sim a \vee b$ traduz-se em linguagem corrente por: « $\sqrt{7}$ é um número racional ou superior a 3.»

Como as proposições $\sim a$ e b são ambas falsas, $\sim a \vee b$ é uma proposição falsa.

7.2.3 $\sim b \Rightarrow \sim c$.

Resolução

$\sim b \Rightarrow \sim c$ traduz-se em linguagem corrente por: «se $\sqrt{7}$ é um número inferior ou igual a 3, então $1-\sqrt{7}$ é superior ou igual a –2.»

Como as proposições $\sim b$ e $\sim c$ são ambas verdadeiras, $\sim b \Rightarrow \sim c$ é uma proposição verdadeira.

Questão 8

Identifique as operações lógicas e as proposições elementares envolvidas em cada uma das seguintes proposições e escreva-as em linguagem simbólica.

(Por exemplo, «Se $\sqrt{11} < 4$ então ou $\left(\sqrt{11}\right)^2 < 4^2$ ou $\left(\sqrt{11}\right)^2 > 4^2$» pode traduzir-se simbolicamente por $a \Rightarrow (b \vee c)$ sendo a: $\sqrt{11} < 4$, b: $\left(\sqrt{11}\right)^2 < 4^2$ e c: $\left(\sqrt{11}\right)^2 > 4^2$.)

8.1 «5163 é múltiplo de 3 se, e só se, a soma do valor dos algarismos desse número for um múltiplo de 3.» Ver resposta.

8.2 *«Nem 102 é um número ímpar nem $\sqrt{11}$ é um número racional.» Ver resposta.

8.3 *«Como 3400 termina por dois zeros, é múltiplo de 2, de 5 e de 4.» Ver resposta.

8.1 «5163 é múltiplo de 3 se, e só se, a soma do valor dos algarismos desse número for um múltiplo de 3.»

Resolução

A proposição pode traduzir-se simbolicamente por $a \Leftrightarrow b$ sendo *a*: «5163 é múltiplo de 3» e *b*: «a soma dos algarismos de 5163 é múltiplo de 3».

8.2 *«Nem 102 é um número ímpar nem $\sqrt{11}$ é um número racional.»

Resolução

A proposição pode traduzir-se simbolicamente por $\sim a \wedge \sim b$

sendo *a*: «102 e um número ímpar» e *b:* «$\sqrt{11}$ é um número racional».

8.3 *«Como 3400 termina por dois zeros, é múltiplo de 2, de 5 e de 4.»

Resolução

A proposição pode traduzir-se simbolicamente por $a \Rightarrow (b \wedge c \wedge d)$ em que *a*: «3400 termina por dois zeros», *b*: «3400 é múltiplo de 2», *c*: «3400 é múltiplo de 5» e *d*: «3400 é múltiplo de 4».

Questão 9

**Considere uma operação $\dot{\vee}$, dita «ou exclusivo» ou «disjunção exclusiva», tal que, dadas proposições *p* e *q*, $p \dot{\vee} q$ é verdadeira quando e apenas quando *p* e *q* têm valores lógicos distintos. Resolva as questões que se seguem.

9.1 Dadas as proposições *p* e *q*, construa uma proposição equivalente a $p \dot{\vee} q$ partindo de *p* e *q* e utilizando apenas as operações $\wedge$, $\vee$ e $\sim$. Ver resposta.

9.1 Dadas as proposições *p* e *q*, construa uma proposição equivalente a $p \dot{\vee} q$ partindo de *p* e *q* e utilizando apenas as operações $\wedge$, $\vee$ e $\sim$.

Resolução

$$p \dot{\vee} q \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$$

9.2 Indique, justificando, se, dadas as proposições *p* e *q*, algumas das proposições que se seguem é sempre verdadeira.

9.2.1 $\sim\left(p \dot{\vee} q\right) \Leftrightarrow p \wedge q$. Ver resposta.

9.2.2 $\sim\left(p \dot{\vee} q\right) \Leftrightarrow p \vee q$. Ver resposta.

9.2.3 $\sim\left(p \dot{\vee} q\right) \Leftrightarrow \left(p \Rightarrow q\right)$. Ver resposta.

9.2.4 $\sim\left(p \dot{\vee} q\right) \Leftrightarrow \left(p \Leftrightarrow q\right)$. Ver resposta.

9.2.1 $\sim\left(p \dot{\vee} q\right) \Leftrightarrow p \wedge q$

Resolução

p	q	$p \dot{\vee} q$	$\sim\left(p \dot{\vee} q\right)$	$p \wedge q$	$\sim\left(p \dot{\vee} q\right) \Leftrightarrow p \wedge q$
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	F	F

Logo, $\sim\left(p \dot{\vee} q\right) \Leftrightarrow p \wedge q$ não é sempre verdadeira.

9.2.2 $\sim\left(p \dot{\vee} q\right) \Leftrightarrow p \vee q$

Resolução

p	q	$p \dot{\vee} q$	$\sim\left(p \dot{\vee} q\right)$	$p \vee q$	$\sim\left(p \dot{\vee} q\right) \Leftrightarrow p \vee q$
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	F
F	V	V	F	V	F
F	F	F	V	F	F

Logo, $\sim\left(p \dot{\vee} q\right) \Leftrightarrow p \vee q$ não é sempre verdadeira.

9.2.3 $\sim\left(p\dot{\vee}q\right)\Leftrightarrow(p\Rightarrow q)$

Resolução

p	q	$p\dot{\vee}q$	$\sim\left(p\dot{\vee}q\right)$	$p\Rightarrow q$	$\sim\left(p\dot{\vee}q\right)\Leftrightarrow(p\Rightarrow q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F
F	F	F	V	V	V

Logo, $\sim\left(p\dot{\vee}q\right)\Leftrightarrow(p\Rightarrow q)$ não é sempre verdadeira.

9.2.4 $\sim\left(p\dot{\vee}q\right)\Leftrightarrow(p\Leftrightarrow q)$

Resolução

p	q	$p\dot{\vee}q$	$\sim\left(p\dot{\vee}q\right)$	$p\Leftrightarrow q$	$\sim\left(p\dot{\vee}q\right)\Leftrightarrow(p\Leftrightarrow q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V

Logo, $\sim\left(p\dot{\vee}q\right)\Leftrightarrow(p\Leftrightarrow q)$ é sempre verdadeira.