

Proposições

Proposição é uma expressão suscetível de ser verdadeira ou de ser falsa.

Exemplos:

São proposições:

- $2 + 3 = 5$
- «O mínimo múltiplo comum dos números 4 e 6 é 24.»
- «Lisboa é a capital de Portugal.»

Não são proposições expressões que designam entes, como, por exemplo:

- $2 + 3$
- «O mínimo múltiplo comum dos números 4 e 6.»
- «A capital de Portugal.»

Princípio da não contradição: uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa.

1. Das seguintes expressões, indica as que são proposições.

- «A cenoura é mais saborosa que o tomate.»
- «O rio Douro nasce na serra da Estrela.»
- «Maradona foi o melhor jogador de futebol de sempre.»
- «O maior número inteiro menor do que π .»
- «O máximo divisor comum dos números 10 e 24.»
- «O menor número primo é par.»

Valor lógico de uma proposição

Se uma proposição é verdadeira, dizemos que tem valor lógico «verdade» (V).

Se uma proposição é falsa, dizemos que tem valor lógico «falso» (F).

2. Indica o valor lógico de cada uma das seguintes proposições.

- a) $-3 - 5 = 8$ b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$ c) $\frac{\frac{2}{3}}{7} = \frac{14}{3}$
- d) $2^3 + 2^5 = 2^8$ e) $3 - (\sqrt{2} - 2) = 1 - \sqrt{2}$ f) $2^{-4} = -8$
- g) «4 é o máximo divisor comum dos números 12 e 16.»
- h) «40 é o mínimo múltiplo comum dos números 4 e 10.»
- i) «A soma dos números primos que pertencem ao intervalo $[1, 9]$ é um número primo.»
- j) «A área de um triângulo equilátero que tem perímetro 6 é $\sqrt{3}$.»

Equivalência

Dadas duas proposições, p e q , podemos construir a proposição $p \Leftrightarrow q$, que se lê « p é equivalente a q », a qual é verdadeira se as proposições p e q tiverem o mesmo valor lógico e é falsa se as proposições p e q não tiverem o mesmo valor lógico.

Exemplos:

- a proposição $5^0 = 1 \Leftrightarrow \pi > 2$ é verdadeira ($5^0 = 1$ e $\pi > 2$ são proposições verdadeiras);
- a proposição $3^2 = 6 \Leftrightarrow -5 > 0$ é verdadeira ($3^2 = 6$ e $-5 > 0$ são proposições falsas);
- a proposição $4 < -5 \Leftrightarrow 2 + 1 = 3$ é falsa ($4 < -5$ é falsa e $2 + 1 = 3$ é verdadeira).

Tabela de verdade:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

3. Considera as seguintes proposições:

p : «O número $\sqrt{49}$ é racional.»

q : $2 + 3 \times 4 = 20$

r : $-3 < -5$

s : «Os números 2 e 3 são divisores de 3456.»

Indica o valor lógico das seguintes proposições.

a) $p \Leftrightarrow q$

b) $q \Leftrightarrow r$

c) $p \Leftrightarrow s$

4. Sejam p e q duas proposições tais que p é falsa e q é verdadeira.

Indica, justificando, o valor lógico da proposição $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow p$.

Negação

Dada uma proposição p , podemos construir a proposição $\sim p$, que se lê «não p », a qual é verdadeira se a proposição p for falsa e é falsa se a proposição p for verdadeira.

Exemplo:

A negação da proposição «Barcelona é uma cidade francesa.» é «Barcelona não é uma cidade francesa.»

Tabela de verdade:

p	$\sim p$
V	F
F	V



Barcelona

Tem-se a seguinte propriedade (dupla negação): $[\sim(\sim p)] \Leftrightarrow p$

5. Seja p a proposição: «D. Dinis foi o primeiro rei de Portugal.»
Escreve, em linguagem corrente, a proposição $\sim p$.
6. Seja p a proposição: «O telemóvel da Inês é da mesma marca do telemóvel da Catarina.»
A proposição $\sim p$ pode ser expressa de várias maneiras.
Das expressões apresentadas a seguir, indica as que exprimem a proposição $\sim p$.
 - «O telemóvel da Inês não é da mesma marca do telemóvel da Catarina.»
 - «Não é verdade que os telemóveis da Inês e da Catarina sejam da mesma marca.»
 - «Os telemóveis da Inês e da Catarina são de marcas diferentes.»
 - «O telemóvel da Inês não é de marca diferente do telemóvel da Catarina.»
 - «Os telemóveis da Inês e da Catarina não são da mesma marca.»
7. Seja p a proposição: $3^{-2} + 4^{-2} = \left(\frac{5}{12}\right)^2$
 - a) Indica o valor lógico da proposição p .
 - b) Seja q uma proposição tal que é verdadeira a equivalência $p \Leftrightarrow (\sim q)$.
Qual é o valor lógico da proposição q ? Justifica a tua resposta.
8. Seja p a proposição: «A soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo não é 90° .»
 - a) Indica o valor lógico da proposição p .
 - b) Escreve, em linguagem corrente, a proposição $\sim p$.
9. Sejam p e q duas proposições tais que é falsa a proposição $p \Leftrightarrow q$.
Indica o valor lógico de cada uma das seguintes proposições.

a) $\sim(p \Leftrightarrow q)$	b) $[\sim(\sim q)] \Leftrightarrow p$	c) $(\sim p) \Leftrightarrow (\sim q)$
d) $p \Leftrightarrow (\sim q)$	e) $\sim[(\sim p) \Leftrightarrow q]$	

Conjunção e disjunção

Dadas proposições p e q , podemos construir:

- a proposição $p \wedge q$, que se lê « p e q », a qual é verdadeira apenas no caso em que as proposições p e q são ambas verdadeiras ($p \wedge q$ designa-se por **conjunção** de p e q);
- a proposição $p \vee q$, que se lê « p ou q », a qual é falsa apenas no caso em que as proposições p e q são ambas falsas ($p \vee q$ designa-se por **disjunção** de p e q).

Exemplo:

Seja p a proposição «Hoje almoço em casa.» e seja q a proposição «Amanhã janto fora.»

Então, a proposição $p \wedge q$ é «Hoje almoço em casa e amanhã janto fora.» e a proposição $p \vee q$ é «Hoje almoço em casa ou amanhã janto fora.»

Tabelas de verdade:

Conjunção

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjunção

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Convenção de escrita (prioridade das operações lógicas)

A expressão $[(\sim p) \wedge q] \Leftrightarrow r$ pode ser escrita sem parêntesis: $\sim p \wedge q \Leftrightarrow r$

De facto, na escrita de uma expressão que envolve operações lógicas, convencionou-se a ordem seguinte relativamente à prioridade das operações:

- 1.^a Negação.
- 2.^a Conjunção e disjunção (entre a conjunção e a disjunção não existe prioridade).
- 3.^a Equivalência.

10. Em cada uma das alíneas seguintes está escrita uma expressão que é conjunção de duas proposições.

Para cada alínea, indica quais são essas proposições.

- «A Filipa é filha da Joana e do Marco.»
- «18 é múltiplo de 3 e de 6.»
- $1 < 2 < 3$

- 11.** Em cada uma das alíneas seguintes está escrita uma expressão que é disjunção de duas proposições.

Para cada alínea, indica quais são essas proposições.

a) «A Teresa tem dois ou três irmãos.»

b) $\frac{9}{4} \leq 2,5$

c) «Pelo menos um dos meus filhos, Margarida e Pedro, vai comigo ao cinema esta tarde.»

- 12.** Considera as seguintes proposições:

p : «Vou comer uma laranja.»

q : «Vou comer uma maçã.»

Traduz, em linguagem corrente, as seguintes proposições.

a) $\sim p$

b) $p \wedge q$

c) $p \wedge \sim q$

d) $\sim p \wedge \sim q$

e) $p \vee q$

f) $(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$

- 13.** Sejam A e B dois conjuntos e sejam p , q e r as seguintes proposições:

p : $2 \notin A$

q : $3 \in A$

r : $3 \in B$

a) Utilizando apenas as letras p , q e r e os símbolos $\sim$, $\wedge$ e $\vee$, traduz, em linguagem simbólica, as seguintes proposições.

a₁) «2 pertence ao conjunto A .»

a₂) «3 pertence ao conjunto A e ao conjunto B .»

a₃) «3 pertence ao conjunto A ou ao conjunto B .»

a₄) «2 não pertence ao conjunto A , mas 3 pertence ao conjunto B .»

a₅) «2 e 3 pertencem ao conjunto A .»

a₆) «3 pertence ao conjunto B , mas não pertence ao conjunto A .»

a₇) «3 não pertence ao conjunto A , nem ao conjunto B .»

b) Escreve, em linguagem corrente, as seguintes proposições.

b₁) $\sim p \vee q$

b₂) $p \wedge \sim r$

- 14.** Sejam a e b duas proposições tais que é verdadeira a proposição $\sim a \wedge \sim b$.

Indica o valor lógico das seguintes proposições.

a) $a \wedge \sim b$

b) $a \vee \sim b$

- 15.** Sejam p e q duas proposições tais que é falsa a proposição $p \Leftrightarrow (\sim q)$.

Indica o valor lógico das seguintes proposições.

a) $\sim(\sim p \Leftrightarrow q)$

b) $\sim p \vee q$

c) $p \wedge \sim q$

Propriedades da negação, da conjunção e da disjunção

Sejam p , q e r proposições, v uma proposição verdadeira e f uma proposição falsa.

Dupla negação	$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$	
Idempotência	$p \wedge p \Leftrightarrow p$	$p \vee p \Leftrightarrow p$
Comutativa	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
Associativa	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
Conjunção de uma proposição verdadeira com outra proposição	$v \wedge p \Leftrightarrow p \wedge v \Leftrightarrow p$	
Conjunção de uma proposição falsa com outra proposição	$f \wedge p \Leftrightarrow p \wedge f \Leftrightarrow f$	
Disjunção de uma proposição verdadeira com outra proposição	$v \vee p \Leftrightarrow p \vee v \Leftrightarrow v$	
Disjunção de uma proposição falsa com outra proposição	$f \vee p \Leftrightarrow p \vee f \Leftrightarrow p$	
Distributivas	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Princípio da não contradição	$p \wedge \neg p \Leftrightarrow f$	
Princípio do terceiro excluído	$p \vee \neg p \Leftrightarrow v$	
Primeiras leis de De Morgan	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

16. Sejam p e q duas proposições.

a) Aplicando as propriedades da negação, da conjunção e da disjunção, prova as equivalências que a seguir se apresentam. Em cada passo indica as propriedades que utilizaste.

$$a_1) \neg(\neg p) \wedge (q \vee \neg q) \Leftrightarrow p$$

$$a_2) \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$$

$$a_3) [(p \vee \neg p) \wedge q] \wedge [\neg(\neg p \wedge q)] \Leftrightarrow p \wedge q$$

$$a_4) p \vee [q \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow p \vee q$$

b) Prova as mesmas equivalências utilizando tabelas de verdade.

17. Sejam p e q duas proposições.

Simplifica cada uma das expressões seguintes e indica, sempre que possível, o respetivo valor lógico.

$$a) [(\neg p \wedge q) \vee \neg(p \vee q)] \wedge p$$

$$b) \neg[p \wedge (\neg p \vee q)] \vee (p \wedge q)$$

$$c) [(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)] \vee q \wedge (\neg p \vee q)$$

18. A Inês e a Rita são amigas do Júlio. Sejam p e q as seguintes proposições:

p : «O Júlio e a Inês têm a mesma idade.»

q : «O Júlio e a Rita têm a mesma idade.»

Sabe-se que é verdadeira a proposição $p \wedge [q \vee \neg(p \vee q)]$.

Indica, justificando, o valor lógico da proposição «A Rita e a Inês têm a mesma idade.»

19. A Valéria lançou um dado, com as faces numeradas de 1 a 6.

Sejam p , q e r as seguintes proposições:

p : «Saiu face com número par.»

q : «Saiu face com número primo.»

r : «Saiu face com número divisor de 8.»

Indica que número saiu no lançamento do dado, sabendo que é verdadeira a proposição $(p \vee q) \wedge \neg[(q \wedge r) \vee \neg r]$.

